(1) المحاضرة الأولى

Subject: / /

تعريف 1 اذا كان T تجزئة للمجال الحقيقي $[a,b]$ ولتكن تجزئة منتظمة على المجال $[a,b]$ فان

$$T=\{a=x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n=b\}$$

ونشكل المجموع الآتي

$$V(f,T)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

ولما كان لكل التجزئة للمجال المعطى مقابلها من هنا المجموع نحصل على مجموعة من المجاميع نحصل المجموعة الآتية

$$\{V(f,T) : T\in \mathbb{R}[a,b]\}$$

حيث $\mathbb{R}[a,b]$ أسرة كل التجزئات الممكنة للمجال $[a,b]$

إذا كان يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث يكون $V(f,T)\leq M$ وذلك لأي T كان

$$T\in \mathbb{R}[a,b]$$

وعندئذ فان الدالة $f(x)$ تمثل دالة محدودة التغير على المجال المغلق $[a,b]$ ونسمي الحد الأعلى الأصغر لأسرة المجاميع والذي نرمز له $\mathbb{R}[a,b]$

$$\sup\{V(f,T) ; T\in \mathbb{R}[a,b]\} = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

بالتغير الكلي للدالة $f(x)$.

P.S اذا كان $\{V(f,T) : T\in \mathbb{R}[a,b]\}$ غير محدودة فان الدالة لا تكون محدودة التغير ونصطلح على ان التغير الكلي

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=+\infty$$

مثال لتكن الدالة $f(x)$. $f(x)=x^2+1 \ : x\in[0,1]$

نلاحظ ان هذه الدالة معرفة ومستمرة على المجال $[0,1]$ ولتكن التجزئة

$$T=\{0=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=1\}$$

$$V(f,T)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|(x_k^2+1)-(x_{k-1}^2+1)|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|(x_k^2-x_{k-1}^2)| = x_n-x_0=1-0=1\leq M$$

فهي محدودة التغير وعليه فان التغير الكلي

$$\sup\{V(f,T) ; T\in \mathbb{R}_{[0,1]}\}=\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=1$$

مثال: لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

نلاحظ ان هذه الدالة مستمرة على المجال $[0,1]$ ولكن هذه الدالة ليست محدودة التغير على هذا المجال لأن:

باستخدام اختبار التجزئة:

$$T=\{x_0=0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2(n-1)}<\cdots<\frac{1}{2}<1\}$$

$$f(0)=0 \quad , \quad f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}\cos\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2n}\cos 2n\pi$$

$$=\frac{1}{2n}(-1)^{n+1}$$

$$f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2n-1}\cos\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{2n-1}}=\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=0$$

$$f\left(\frac{1}{2n-2}\right)=\frac{1}{2n-1}\cos\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{2n-2}}=\frac{1}{2n-2}\cos\frac{(2n-2)\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{2n-2}\cos(n-1)\pi=\frac{1}{2n-2}(-1)^{n+1}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cos\pi=-\frac{1}{2}$$

$$f(1)=\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$V(f,T)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=$$

$$= \left|\frac{1}{2n}(-1)^{n+1} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{2n}(-1)^{n+1}\right| + \left|\frac{1}{2n-2}(-1)^{n+1} - 0\right| +$$

$$\left|0 - \frac{1}{2n-2}(-1)^{n+1}\right| + \cdots + \left|0 + \frac{1}{2}\right| = \frac{2}{2n} +$$

$$\frac{2}{2(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 = V_n$$

حيث V_n متتالية المجاميع الجزئية الموافقة لمتسلسلة التوافقية وهي غير محدودة إذاً متباعدة فإن الدالة غير محدودة التغير وبالتالي

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \infty$$

P.S

مما تقدم نلخص إلى القول أن استمرارية الدالة على مجال ما لا يضمن أنها محدودة التغير ((ذات تغيرات محدودة))

وكما أنه من الممكن أن نصادف دوال غير مستمرة على مجال مغلق ومحدودة ولكنها محدودة التغير.